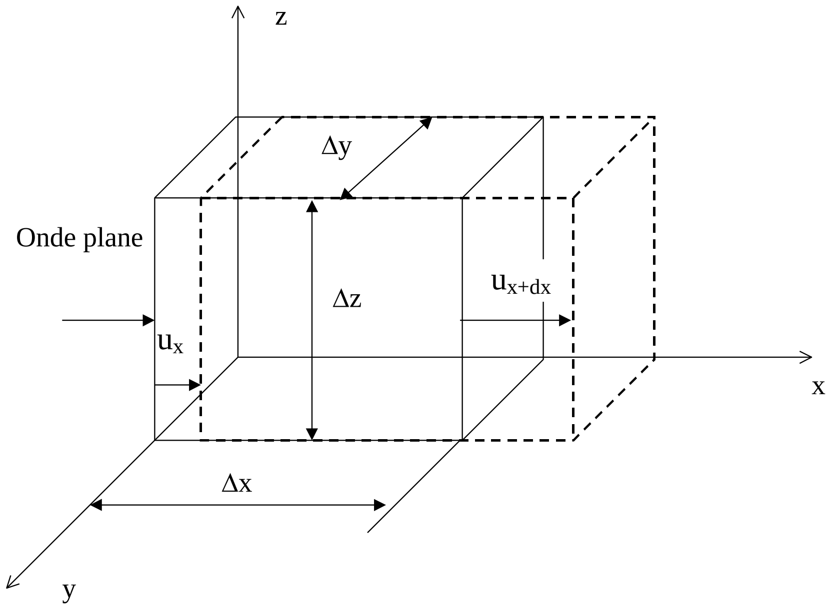
Equation d'onde

Son pur

- déplacement u
- Vitesse particulaire : $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ -> colinéaire à la direction de propagation
- p=a cos(ωt)
- cette perturbation de pression engendre une variation de masse volumique

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$



Hypothèses acoustiques

- Mouvement de très petite amplitude et mvt moyen nul
  - μ amplitude très petite
  - u déplacement très petit
  - $p \ll P_0$
  - $s \ll 1$

Autres hypothèses

- air ambiant = gaz parfait
- transformation adiabatique
- le milieu ne contient pas de sources (ou puits) de son ou de masse - influence de la gravité négligée
- viscosité du milieu négligée

L'établissement de l'équation de propagation des ondes ("EPO") dans l'air non visqueux s'appuie sur les équations de départ suivantes:

a) l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse (sans source ni puits de masse)

En 1D

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

b) l'équation de conservation de la quantité de mouvement qui exprime ici l'accélération des particules résultant des forces dues aux variations de la pression sonore

En 1D

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

c) l'équation d'état qui traduit la détente adiabatique correspondant à la transformation que subit le milieu "air ambiant" (supposé être un gaz parfait) lorsqu'une onde sonore se propage.

La variation d'énergie interne *dU* d'un élément de volume *V* constitué de *n* moles d'air s'écrit *dU = dW + dQ* avec *dW* travail des forces de pression échangé avec l'extérieur et *dQ* chaleur échangée avec l'extérieur.

dW = - *PdV* où *P* = P_o + *p* (pression totale) *dQ = 0* car la détente est supposée adiabatique

Nous avons donc $dU = nC_v d\theta = -PdV$ avec *Cv* chaleur spécifique de l'air supposée indépendante de la température e à l'instant considéré.
Or PV=nRθ (loi des gaz parfaits)

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{R}{C_v}\frac{dV}{V}$$ et en intégrant $$\ln\theta + \frac{R}{C_v}\ln V = Cste$$

Comme $R=C_p-C_v$ et $\gamma=C_p/C_v$, on obtient $\ln\theta + (1-\gamma)\ln V = Cste$
soit $PV^{\gamma} = Cste$

En différentiant cette dernière expression, on a

$$\frac{dP}{P} = -\gamma\frac{dV}{V} \; ou \; \gamma\frac{d\rho}{\rho}$$

soit $$\frac{p}{P_0 + p} = -\gamma\frac{s\rho_0}{\rho_0 + s\rho_0}$$

en négligeant p/P_0 et s devant 1, on obtient finalement

$p=c^2.s\rho_0$ ou $P - P_0 = c^2(\rho - \rho_0)$ avec $c^2 = \gamma \, {P_0}/{\rho_0}$

L’ensemble des trois équations précédentes permet d’établir l’équation de propagation des ondes (EPO).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

$$p = c^2 s.\rho_0 = c^2(\rho - \rho_0) \qquad (3)$$

En regroupant les équations (1) et (3), on obtient

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

En différentiant (4) par rapport à t et (2) par rapport à x, il vient :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t.\partial x} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x} = 0 \quad \text{(EPO) en 1D}}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t.\partial x} = 0$$